CALCULO DA DURAÇÃO DO CREPUSCULO DA TARDE DE 1 DE OUTUBRO DE 1541, EM LISBOA

PELO

DR. PEDRO NUNES

O Dr. Pedro Nunes na proposição XV do seu tratado *De Crepusculis* (Coimbra, 1573, pag. 40 e 41) indicou o processo para determinar a duração do crepusculo da tarde ou da manhã. Este processo consiste em observar a altura de uma estrella, cuja ascensão recta e declinação são conhecidas, no momento em que se julgue terminar o crepusculo da tarde, ou começar o da manhã, e com a altura observada da estrella calcular a distancia ao meridiano, ou o seu angulo horario. A differença das ascensões rectas do sol e da estrella, augmentada do angulo horario da estrella observada no momento de terminar o crepusculo da tarde, ou de começar o da manhã, diminuida do semiarco diurno do sol, é a duração do crepusculo.

O Dr. Pedro Nunes deu um exemplo de calculo, a duração do crepusculo da tarde do dia 1 de outubro de 1541. Eis ahi o texto da proposição XV; e em seguida serão explicados os calculos feitos.

PROPOSITIO XV.—*Longitudinem Crepusculi indagare*

In initio crepusculi matutini aut fine vespertini, observetur cum astrolabio cuius constructionem in tertia propositione docuimus, altitudo cuiusvis stellae quae per sextam, declinationem et ascensionem rectam cognitam habeat; et per precedentem supputetur arcus horarum aequalium ante meridiem aut post. Supputetur etiam per setimam aut octavam longitudo arcus semidiurni loci solis: differentia enim utriusque arcus, erit crepusculi intercapedo magnitudove. Exemplum: Olyssipone labente anno salutis 1541, prima die mensis Octobris vesperi, sereno coelo, ex summa urbís arce, quum nihil splendoris jam esset in parte occidua, observavi stellam cordis Scorpii tendentem in occasum, eamque quinque gradibus supra horisontem elevatam deprehendi. Et quoniam eius locus est finis quarti gradus

---

PROPOSIÇÃO XV. --- *Determinar a grandeza do crepusculo*

No principio do crepusculo da manhã ou no fim do da tarde, observe-se com o astrolabio, cuja construcção ensinamos na proposição III, a altura de qualquer estrella, que tenha (pela proposição VI) ascensão recta e declinação conhecidas, e calcule-se pela proposição precedente o arco das horas eguaes antes ou depois do meio dia. Calcule-se tambem pela proposição VII ou VIII a grandeza do semiarco diurno do logar do sol; a differença d'esses dous arcos será o intervallo ou duração do crepusculo

. Exemplo. Em Lisboa decorrendo o anno da Graça de 1541, no primeiro dia do mez de outubro, á tarde, estando o ceu sereno, observei do ponto mais elevado do castello da cidade, quando não havia já nenhuma claridade no poente, a estrella do Coração do Escorpião, tendendo a occultar-se, e calculei que ella se elevava 5 graus acima do horizonte.

Ora, estando a posição d'essa estrella á distancia de 4

Sagitarii quod Albategni sententiae et nostris etiam aliis observationibus convenit, erit idcirco eius declinatio gra. 24. min. 56. asceusio recta gra. 241. min. 10. proinde 8714 sinum rectum gra. 5. auferamus a 44463 sinu recto gra. 26. min. 24. altitudinis meridianae eiusdem stellae, et relinquetur differentia sinuum rectorum 35748. hanc itaque differentiam multiplicabimus in quadratum sinus totius: productum dividamus per eum numerum qui fit ex ductu 90679. sinus nempe recti complementi declinationis praedictae stellae, in 78079. sinum rectum complementi altitudinis poli, et venient ex partitione 50492. sinus versus gra. 60. min. 19. distantiae ipsius stellae a meridiano. Et quoniam sol occupabat eo tempore finem gradus 18. Librae, cuius ascensio recta gra. 196. min. 35. differentia igitur ipsarum rectarum ascensionum gra. 44. min. 36. fuit itaque distantia solis a meridie secundum motum diurnum gra. 104. min. 54. ab iis detrahemus arcum semidiurnum solis gra. 84. min. 18. et reliquentur gr. 20. min. 36. pro crepusculi magnitudine,

---

graus do Sagitario, o que concorda com a opinião de Albatenio, e tambem com outras observações nossas, será pois a sua declinação 24 graus e 56 minutos, e a ascensão recta 241 graus e 10 minutos; pelo que subtrahiremos 8 716, seno recto de 5 graus, de 44 463, seno recto de 26 graus e 24 minutos, altura meridiana da dita estrella, e restará a differença 35 748 dos senos rectos; esta differença multiplicaremos pelo quadrado do seno total; e o producto dividiremos pelo numero resultante do producto de 90 679, isto é, seno recto do complemento da declinação da dita estrella, por 78 079 seno recto do complemento da altura de polo, e virá para quociente 50 492, seno verso de 60 graus e 19 minutos, da distancia da mesma estrella ao meridiano. E porque neste tempo o sol occupava a posição do fim de 18 graus de Libra, cuja ascensão recta era 196 graus e 35 minutos; a differença pois das mesmas ascensões rectas foi de 44 graus e 35 minutos; e assim a distancia do sol ao meridiano, contada no sentido do movimento diurno, foi de 104 graus e 54 minutos. D'este nunempe hora una min. 22. sec. 24. Verumtamen si exactae rationis examini stare velimus haec summa maiuscula est quam crepusculi longitudo. Nam crepusculum vespertinum non incipit priusquam centrum solis minutis 14. sub horizonte occultetur; opportebit igitur per octavam propositionem tempus a meridio supputare ad centrum solis ipsis 14. min. sub horizonte conditum: hoc deinde subtrahemus ab inventa distantia, relinqueturque vera crepusculi longitudo.

---

mero subtrahiremos o semiarco diurno do sol, que é 84 graus e 18 minutos, e restarão 20 graus e 36 minutos para duração do crepusculo, isto é, 1 hora, 22 minutos e 24 segundos. Comtudo se quizermos proceder ao exame do calculo rigoroso, este resultado é um pouco maior do que a duração do crepusculo. Com effeito o crepusculo da tarde não começa antes que o centro do sol se occulte 14 minutos abaixo do horizonte; convem pois, pela proposição VIII, calcular o tempo desde o meio dia até que o centro do sol se esconda abaixo do horizonte os ditos 14 minutos; depois subtrahindo isto da distancia encontrada, ficará a grandeza verdadeira do crepusculo.

Expliquemos agora, como o Dr. Pedro Nunes calculou a duração do crepusculo.

A estrella observada foi o Coração do Escorpião [1], alpha da constellação do Escorpião, tambem conhecida pelo nome de Antares; as suas coordenadas, segundo o Dr. Pedro Nunes, eram [2]:

---

[1] Calbelatear em arabio, coor escorpionis em llatim, coraçam descorpiam tem 24 graus e 36 meudos de decrinaçam meridionaes, he a mais luzente daquela coroa que faz em maneira darado, tem 5 estrelas. (*Tratado da agulha de marear por João de Lisboa*, no *Livro de marinharia*, publ. por J. I. Brito Rebello, Lisboa, 1903, p. 4[5]).

[2] As coordenadas de Antares em 1 de janeiro de 1891, isto é, 350 annos depois, eram:

$$\alpha = \quad 245^\circ\ 40'\ 51''$$
$$\delta = -\ 26^\circ\ 11'\ 22'',6$$

Ascensão recta	$\alpha =$	241°	10
Declinação	$\delta = -$	24°	56′
Altura observada no fim do crepusculo da tarde	$h =$	5°	0′

No triangulo espherico, cujos vertices são o polo boreal P, o zenit do logar de observação Z, e a estrella E, designando por φ a latitude do logar da observação, e por t a distancia da estrella ao meridiano (angulo horario), é:

$$PZ = 90° - \varphi \qquad ZE = 90° - h$$
$$PE = 90° - \delta \qquad ZPE = t$$

Do mesmo triangulo deduz-se:

$$\cos(90°-h) = \cos(90°-\varphi)\cos(90°-\delta) + \text{sen}(90°-\varphi)\,\text{sen}(90°-\delta)\cos t;$$

donde:

$$\cos t = \frac{\cos(90°-h) - \cos(90°-\varphi)\cos(90°-\delta)}{\text{sen}(90°-\varphi)\,\text{sen}(90°-\delta)};$$

donde:

$$1 - \cos t = \frac{\cos(90°-\varphi)\cos(90°-\delta) + \text{sen}(90°-\varphi)\,\text{sen}(90°-\delta) - \cos(90-h)}{\text{sen}(90°-\varphi)\,\text{sen}(90°-\delta)},$$

ou

$$1 - \cos t = \frac{\text{sen}[90-(\varphi-\delta)] - \text{sen}\,h}{\text{sen}(90°-\varphi)\,\text{sen}(90°-\delta)},$$

ou

$$\text{sen vers}\,t = \frac{\text{sen}[90-(\varphi-\delta)] - \text{sen}\,h}{\text{sen}(90°-\varphi)\,\text{sen}(90°-\delta)}.$$

Foi esta a formula empregada no calculo pelo Dr. Pedro Nunes.

A latitude do logar de observação (castello de Lisboa) era, segundo o Dr. Pedro Nunes [1]:

$$\varphi = 38°\,40'.$$

A altura meridiana da estrella era:

$$90° - (\varphi - \delta) = 90° - [38°\,40' - (-24°\,56')] = 26°\,24'$$

Com os valores da latitude do logar de observação, da declinação da estrella, da sua altura meridiana e da sua al-

[1] Segundo o Dr. Pedro Nunes o seno recto da altura do polo em Lisboa era 62.478 (*De crepusculis*, p. 36), o que corresponde a 38° 40′.
A latitude do Castello de Lisboa é: 38° 42′ 43″.

tura no fim do crepusculo da tarde, por meio do expressão do sen. vers. t obteve o Dr. Pedro Nunes o valor da distancia da estrella observada ao meridiano (angulo horario) que foi:

$$t = 60^\circ\ 19'.$$

Por tanto a distancia do sol ao meridiano no momento da observação da estrella foi assim obtida:

Ascensão recta da estrella.......	$\alpha = 241^\circ\ 10'$
» » do sol..........	$\alpha' = 196^\circ\ 35'$
Differença.....................	$= 44^\circ\ 35'$
Distancia da estrella ao meridiano	$t = 60^\circ\ 19'$
Distancia do sol ao meridiano....	$= 104^\circ\ 54'$

O semiarco diurno nesse dia, calculado pelo Dr. Pedro Nunes, foi de $84^\circ\ 18'$; portanto a duração do crepusculo da tarde foi:

$$104^\circ\ 54' - 84^\circ\ 18' = 20^\circ\ 36';$$

ou em tempo:

$$= 1 \text{ h. } 22 \text{ m. } 24 \text{ s.}$$

Os calculos podem fazer-se de modo analogo empregando os logarithmos.

Do triangulo espherico, cujos vertices são o polo boreal, o zenith do logar de observação, e a estrella observada, deduz-se:

$$\text{sen}\, h = \text{sen}\, \varphi\, \text{sen}\, \delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t;$$

ora

$$\cos t = 1 - 2\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} t;$$

e substituindo obtem-se:

$$\text{sen}\, h = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos\varphi \cos\delta\, \text{sen}^2 \frac{1}{2} t;$$

donde:

$$\text{sen}\, \frac{1}{2} t = \left[\frac{\cos(\varphi - \delta) - \text{sen}\, h}{2 \cos\varphi \cos\delta}\right]^{\frac{1}{2}};$$

e substituindo a altura h pela distancia zenital $Z = 90 - h$, vem:

$$\text{sen}\, \frac{1}{2} t = \left[\frac{\cos(\varphi - \delta) - \cos Z}{2 \cos\varphi \cos\delta}\right]^{\frac{1}{2}};$$

ou ainda:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}t=\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z+\varphi-\delta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(Z-\varphi+\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Mas como a altura observada da estrella era:

$$h=5^\circ\ 0';$$

é assim:

$$\begin{array}{rr}
Z= & 85^\circ\ \ 0' \\
+\varphi= & 38^\circ\ 40' \\
\hline
Z+\varphi= & 123^\circ\ 40' \\
-\delta=-(- & 24^\circ\ 56') \\
\hline
Z+\varphi-\delta= & 148^\circ\ 36' \\
\frac{1}{2}(Z+\varphi-\delta)= & 74^\circ\ 18'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
Z= & 85^\circ\ \ 0' \\
-\varphi= & 38^\circ\ 40' \\
\hline
Z-\varphi= & 46^\circ\ 20' \\
+\delta=(- & 24^\circ\ 56') \\
\hline
Z-\varphi+\delta= & 21^\circ\ 24' \\
\frac{1}{2}(Z-\varphi+\delta)= & 10^\circ\ 42'
\end{array}$$

logo:

$$\begin{array}{rl}
\log\operatorname{sen}\frac{1}{2}t=\log\operatorname{sen}74^\circ\ 18' & =\bar{1}.98349 \\
+\log\operatorname{sen}10'\ 42' & =\bar{1}.26873 \\
+\pounds\cos 38^\circ\ 40' & =0.10746 \\
+\pounds\cos 24^\circ\ 45' & =0.04249 \\
\hline
& =\bar{1}.40217 \\
\times\frac{1}{2} & =\bar{1}.70108
\end{array}$$

$$\log\operatorname{sen}\frac{1}{2}t=\bar{1}.70108$$

$$\frac{1}{2}t=30^\circ\ \ 9'\ 40''$$

$$t=60^\circ\ 19'\ 20''.$$

O semiarco diurno do sol é dado pela expressão (Brünnow, *Traité d'Astronomie*, Paris, 1869, I, p. 128 e 129):

$$\cos t_0=-\operatorname{tg}\varphi.\operatorname{tg}\delta.$$

Ora

$$\varphi=38^\circ\ 40';$$

e, segundo o Dr. Pedro Nunes, a ascensão recta do sol no dia 1 de outubro de 1541 era:

$$\alpha'=196^\circ\ 35',$$

a que corresponde a declinação [1]:

$$\delta' = -7^\circ\ 5';$$

assim é:

$$\begin{aligned} \log\cos t_0 &= \log\ \mathrm{tg}\ 38^\circ\ 40' = \bar{1}.90320 \\ &+ \log\ \mathrm{tg}\ \ 7^\circ\ \ 5' = \bar{1}.09434 \\ &\qquad\qquad\qquad = \bar{2}.99754 \end{aligned}$$

$$t_0 = 84^\circ\ 17'\ 36''.$$

Temos portanto:

Ascensão recta do coração do Escorpião......	241° 10′
» » » sol..........................	196° 35′
Differença................................	44° 35′
Distancia do coração do Escorpião ao meridiano	60° 19′ 20″
Somma................................. =	104° 54′ 20′
Semiarco diurno do sol........................	84° 17″ 36″
Duração do crepusculo........................	20° 36′ 44″

e em tempo: 1 hora 22 minutos 27 segundos, que é sensivelmente o valor obtido pelo dr. Pedro Nunes.

Segundo Sacrobosco e Stofler o crepusculo da manhã começa e o da tarde termina quando o sol está a 18° abaixo do horizonte. Sendo t_0 o angulo horario no momento do pôr do sol, e t' a duração do crepusculo, o angulo horario no fim do crepusculo é dado pela expressão (Brünnow, *Traité d'Astronomie*, I, p. 234):

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t_0 + t') = \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(H + 18^\circ) . \cos(H - 18^\circ)}{\cos\varphi . \cos\delta}\right]^{\frac{1}{2}};$$

sendo H a altura meridiana do sol, e dada pela expressão:

$$H = 90^\circ - \varphi + \delta'.$$

---

[1] As taboas do Dr. Pedro Nunes, para 1541, outubro 1, dão:

Logar do sol no signo da Libra $\quad 17^\circ\ 35' + 1'\ 46'' = 17^\circ\ 36'\ 46''$;

mas na proposição XV diz ser 18° de Libra. A este logar do sol no zodiaco corresponde na taboa das declinações o valor da declinação do sol $\delta' = -7^\circ\ 5'$.

Ora, como se viu precedentemente, é:

Latitude do logar de observação .... $\varphi = 38^\circ\ 40'$
Declinação do sol no dia da observação $\delta' = -\ 7^\circ\ 5'$

logo:

$$H = 90^\circ - 38^\circ\ 40' - 7^\circ\ 5' = 44^\circ\ 45'$$

$$H + 18^\circ = 62^\circ\ 45' \qquad H - 18^\circ = 26^\circ\ 45'$$

$$\frac{1}{2}(H + 18^\circ) = 31^\circ\ 22'\ 30'' \qquad \frac{1}{2}(H - 18^\circ) = 13^\circ\ 22'\ 30''$$

portanto temos:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(t_0 + t') = \log \operatorname{sen}\ 31^\circ\ 22'\ 30'' &= \bar{1}.71653 \\ + \log \cos\ 13^\circ\ 22'\ 30'' &= \bar{1}.98618 \\ + \pounds \cos\ 38^\circ\ 40' &= 0.10746 \\ + \pounds \cos\ 7^\circ\ 5' &= 0.00333 \\ &= \bar{1}.81350 \\ \times \frac{1}{2} &= \bar{1}.90675 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(t_0 + t') = \bar{1}.90675$$

$$\frac{1}{2}(t_0 + t') = 53^\circ\ 47'$$

$$t_0 + t' = 107^\circ\ 34'$$

Ora, como se viu precedentemente, é:

$$t_0 = 84^\circ\ 17'\ 36'';$$

logo a duração do crepusculo é:

$$t' = 107^\circ\ 34' - 84^\circ\ 17'\ 36'' = 23^\circ\ 16'\ 24''$$

ou em tempo:

$$t' = 1\ \text{h}.\ 33\ \text{m}.\ 4\ \text{s}.,$$

que é um pouco maior do que a obtida pelo Dr. Pedro Nunes.

Lisboa, 8 de fevereiro de 1912.

FRANCISCO MARIA ESTEVES PEREIRA
Tenente coronel de Engenharia