

## Sur le „Libro de algebra“ de Pedro Nuñez.

Par H. BOSMANS à Bruxelles.

### I.

L'ouvrage qui fait l'objet de cette note est intitulé:

*libro de algebra en arithmetica y geometria.* Com-  
puesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmographo Mayor del Rey  
de Portugal, y Cathedratico Iubi-lado en la Cathedra de Mathe-  
maticas en la Vniuersidad de Coymbra. (Marque d'imprimeur  
de Steelsius: Un autel, sur lequel un sceptre s'élevé entre deux  
colombes. En exergue la devise): Concordia res parvae crescunt.  
*en anvers.* En casa de la Biuda y herederos de Iuan Stelsio.  
1567. *con privilegio real.* <sup>1)</sup>

C'est un volume des plus rares, à tel point que dans son érudite  
bibliographie des ouvrages sortis des presses des STEELSIUS, NUYTS n'en  
parle pas.<sup>2)</sup>

D'assez nombreux exemplaires du *Libro de algebra* ont comme adresse  
d'imprimeur, „En Anvers, En casa de los herederos de Arnolde Bircckman,  
1567“. C'est notamment celle qui est donnée par BRUNET dans son *Manuel  
du libraire.*<sup>3)</sup> DA SILVA les indique l'une et l'autre dans son dictionnaire<sup>4)</sup>,  
et se demande, à ce propos, s'il faut voir, dans ces ouvrages, deux éditions  
distinctes parues, la même année et dans la même ville, chez deux  
libraires différents, ou bien si l'on n'a affaire qu'à une seule et même édition

1) In 8° de 32 p. non numérotées, 681 pp. numérotées au r° seul de 1 à 341  
et 3 p. blanches. L'exemplaire dont je me sers appartient à l'Université de Louvain.  
Il fait partie d'un recueil factice, coté „Sciences 293“, relié aux armes d'ANDRIEN  
ROMAIN (un paon rouant), et qui lui a appartenu. Je remercie vivement MM. les  
bibliothécaires de l'Université, et tout spécialement M. WILS, pour l'obligeance avec  
laquelle ils l'ont mis à ma disposition à Bruxelles.

2) *Jean Steelsius, libraire anversoise.* Série d'articles publiée dans le Bulletin  
du bibliophile Belge, 14 et 15, Bruxelles 1858 et 1859.

3) Tom. 4, Paris 1863, col. 140.

4) *Diccionario bibliographico Portuguez* 6, Lisboa 1862, p. 441—442.

avec deux titres. Cette dernière hypothèse est la vraie. Sans avoir eu  
l'occasion de confronter ensemble des exemplaires de Steelsius et de Bircck-  
man, je crois néanmoins pouvoir l'affirmer avec certitude. Non seulement  
le format, l'année et le nombre de pages sont les mêmes, mais les mul-  
tiples citations faites d'après Bircckman qu'il m'a été possible de contrôler  
concordent parfaitement avec le texte de Steelsius. Au surplus en met-  
tant ainsi au titre d'une même édition leurs adresses respectives, les édi-  
teurs ne font que se conformer à un usage alors courant au Pays-Bas.

Dans son mémoire sur la vie et les travaux de PEDRO NUÑEZ, RIBEIRO  
DOS SANCTOS<sup>1)</sup> parle en outre d'une édition qui aurait paru à Bâle, en  
1592; „da Officina dos herdeiros de Arnolde Birack“, en ajoutant toute-  
fois qu'il ne l'a pas vue.

Jusqu'à meilleure information je tiens ce renseignement pour erroné.

En 1592, il est vrai, parut, à Bâle, une édition des *Opera* de NUÑEZ;  
mais ces *Opera* ne contiennent pas l'algèbre<sup>2)</sup> et l'éditeur en fut SEBASTIEN  
HENRICPETRUS. D'autre part Arnolde Birack est probablement une tran-  
scription fautive d'Arnolde Bircckman. Il doit y avoir là une confusion  
avec les exemplaires qui parurent, en 1567, à Anvers, chez Arnolde  
Bircckman.

Le *Libro de algebra* de NUÑEZ a eu plusieurs versions, toutes restées  
inédites.

Le célèbre JEAN PRETORIUS le traduisit en latin. DOPPELMAYR<sup>3)</sup> nous  
apprend que de son temps le manuscrit original de PRETORIUS se trouvait  
encore à la bibliothèque d'Altorf, parmi les autres papiers de ce savant.  
C'est vraisemblablement le manuscrit renseigné aujourd'hui sous le no. 979,

1) *Memoria da vida e escritos de PEDRO NUNES*, publié dans *Memorias de  
litteratura Portugueza*, publicadas pela academia real das sciencias  
de Lisboa. 7, 1806, p. 271.

2) Le titre complet de cette édition des *Opera* de NUÑEZ en indique bien le  
contenu: *PETRI NONII Salaciensis Opera. Quae complectuntur primum duos Libros, in  
quorum priore tractantur pulcherrima Problemata: in Altero Traduntur ex Mathe-  
maticis disciplinis regulae & instrumenta Artis navigandi, quibus varia rerum Astro-  
nomicarum φαινόμενα circa coelestium corporum motus explorare possumus. Deinde  
Annotationes in ARISTOTELIS problema Mechanicum de Motu navigii ex remis: Item in  
GEORGII PYRBACHII planetarum theoricis Annotationes, quibus multa hactenus per-  
peram intellecta, ab aliisq; praeterita exponuntur. Eiusdem de Erratis ORONTII FINOEI  
Liber Vnus. Postremo, de Crepusculis lib. I. cum libello ALLACEN de causis Crepus-  
culorum. Quae quemadmodum mole exigua videntur, ita virtute ingentia, Lector can-  
dide, intelliges. Cum Gratia & Priuil. Caesareae Majest. Basileae per Sebastianvm  
Henricpetri. — A la fin: Basileae per Sebastianvm Henricpetri. Anno CIO. IO. XCII.  
Mense septembri.*

3) *Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*,  
Nürnberg 1730, p. 89.

sans nom de traducteur, mais avec le millésime de 1615, dans le catalogue des manuscrits de l'université d'Erlangen.<sup>1)</sup> Il serait probablement possible de tirer la chose au clair en confrontant l'écriture de ce manuscrit avec celle des autographes de PRETORIUS que possède cette bibliothèque.

M. L. DELISLE donne, en outre, dans son *Inventaire général des manuscrits français de la bibliothèque nationale*<sup>2)</sup>, sous le no. 1344 (COLBERT): „L'algèbre en arithmétique et géométrie par PIERRE NUÑEZ, traduit de l'espagnol par GUILLAUME DE RASCAS, Seigneur de Bagarris et dédié à HENRI IV. MS. original“. M. BROCARD a déjà appelé l'attention sur ce manuscrit à diverses reprises.<sup>3)</sup>

Ces deux versions ne sont probablement pas les seules. Mais des recherches ultérieures m'eussent exposé à franchir les bornes imposées à ce travail. Les résultats précédents ne sont donc qu'une première indication utile qui aurait besoin d'être complétée.

Avant de quitter cet ordre d'idées, je rappellerai que le *Libro de algebra* fut primitivement écrit en portugais. Cette rédaction est perdue et seule la dédicace de NUÑEZ au prince cardinal, l'Infant don HENRIQUE, nous a été conservée dans la langue originale.

Dans cette dédicace l'auteur nous apprend qu'il traduisit lui-même son oeuvre en espagnol. Il voulait, dit-il, lui ménager ainsi des lecteurs plus nombreux, l'espagnol étant beaucoup plus répandu que le portugais.

Autre renseignement curieux. La dédicace est datée de Lisbonne, le 1<sup>er</sup> décembre 1564, et NUÑEZ nous y dit que son travail était écrit alors depuis plus de trente ans. Le *Libro de algebra* aurait donc été composé, d'après cela, en 1532 ou 1533.

Ceci demande cependant quelques observations.

Entendue de l'original portugais l'assertion de NUÑEZ ne soulève aucune difficulté et je crois bien que c'est ainsi qu'il la comprenait lui-même. Elle serait évidemment fautive si on l'appliquait à la version espagnole. Dans cette dernière version, NUÑEZ fait de multiples et incontestables emprunts à des auteurs qui ont écrit bien après 1533. Au surplus il ne s'en cache pas et cite souvent leurs oeuvres en termes

1) J. C. IRMSCHER, *Handschriften-Katalog der königlichen Universitätsbibliothek zu Erlangen*. Frankfurt a. M. und Erlangen 1852, p. 239. Le manuscrit est signalé en ces termes: „979. — NONII PET., algebra, ex Hispanico utcumque latine facta, Pap. in 4°. 530 S. v. J. 1615. Pappbd.“

2) Tom. 2, Paris 1878, p. 238.

3) L'Intermédiaire des mathématiciens, 9. 1902, p. 41. — *Description et usage d'un nouvel anneau astronomique, d'après un manuscrit inédit*. Sans lieu, ni date, p. 9.

expres. Nommons, par exemple, l'Arithmétique de CARDAN<sup>1)</sup> qui est de 1539, les six premiers livres des *Eléments* d'EUCLIDE par PELETIER<sup>2)</sup> qui sont de 1557, les *Quesiti et inventioni diverse* de TARTAGLIA<sup>3)</sup>, etc. etc.

En constatant ces emprunts, loin de moi toute pensée de blâme; je ne veux que préciser les choses. Il est naturel qu'avant d'éditer son travail NUÑEZ ait cherché à le mettre au courant des derniers progrès de la science. On ne peut que louer cet effort, et si l'auteur méritait un reproche, ce serait, peut-être, de ne pas l'avoir fait assez grand encore. Chose étonnante, en effet, il semble ignorer presque complètement les algébristes allemands. CHRISTOPHE RUDOLF et MICHEL STIFEL notamment lui sont inconnus. Pas une fois il ne les nomme, et on chercherait vainement, dans toute son algèbre, la moindre trace de leur influence.

## II.

Mon intention n'est pas de parcourir le *Libro de algebra*, chapitre par chapitre, comme je l'ai fait, dans la Revue des questions scientifiques pour l'Algebre de PELETIER<sup>4)</sup>, et ici même pour le *De arte magna* de GOSSELIN<sup>5)</sup>; je craindrais de tomber dans des redites. Mais voici quelques points où l'oeuvre de NUÑEZ se distingue nettement des travaux similaires de ses contemporains.

On y remarque tout d'abord une généralité dans les démonstrations, une abstraction dans les énoncés des exercices, très exceptionnels pour l'époque et qui donne au *Libro de algebra* un caractère déjà tout moderne. C'est ainsi que les 110 problèmes d'algèbre, objet du chapitre 5 de la 3<sup>e</sup> partie, ne sont plus tirés, comme chez les autres algébristes du temps, du commerce, de l'industrie, ni des usages courants de la vie; ce sont des problèmes sur les nombres. Que si l'auteur emprunte à L. PACIULO ou à quelque autre une question où des joueurs, par exemple, se partagent des écus, il a soin de ramener le problème à une recherche sur les nombres. Tel est le cas pour le 110<sup>e</sup> problème du chapitre 5 rappelé ci dessus.

1) H. CARDANI *Practica arithmetice & mensurandi singularis* ... [A la dernière page]: Anno a Virgineo partu M. D. XXXIX. Io. Antonius Castellioneus Imprimebat Impensis Bernardi Calusci. — C'est par ex. le prob. 58 du chap. 67 de cet ouvrage (f<sup>o</sup> GG r<sup>o</sup> — GGij r<sup>o</sup>), que NUÑEZ a en vue dans le passage qu'il dit, au f<sup>o</sup> 79r<sup>o</sup>, avoir emprunté à CARDAN.

2) I. PELETIER, *In EUCLIDIS Elementa geometrica demonstrationum libri sex* ... Lvgdvni. Apvd Ioan. Tornaesivm et Gvl. Gazeivm. M. D. LVII. L'ouvrage contient, en appendice, huit lettres de PELETIER à des savants en vue, dont une adressée à NUÑEZ, f<sup>o</sup> (p 5) v<sup>o</sup> — (p 6) r<sup>o</sup>.

3) Ils eurent plusieurs éditions. La première est de Venise 1546.

4) Tom. 41, Bruxelles 1907, p. 117—173.

5) Biblioth. Mathem. 7., 1906/7, p. 43—66.

Ce même cachet d'abstraction se remarque aussi dans les 77 exercices d'application de l'algèbre à la géométrie qui forment l'objet du dernier chapitre de la troisième partie.

Parmi les ouvrages mathématiques du moyen-âge NUÑEZ a étudié à fond l'*Arithmetica* de JORDAN.<sup>1)</sup> Il y est surtout frappé par l'emploi fréquent des lettres introduit par JORDAN<sup>2)</sup> dans les démonstrations arithmétiques, Reconnaissant à cet emploi une force probante que n'ont pas les simples vérifications numériques alors en usage en guise de démonstration il fait sien cette méthode. Son mérite, en cela, est analogue à celui de MAUROLYCO.<sup>3)</sup> Mais pas plus que le géomètre Sicilien, il ne fait faire de progrès à la méthode de JORDAN. C'est ainsi que si chez JORDAN les chiffres sont remplacés par des lettres; il n'a cependant pas encore l'idée de conserver, dans les résultats, la trace des données; les sommes, les différences, les produits et les quotients sont chaque fois remplacés par une lettre nouvelle au fur et à mesure qu'ils se présentent dans les calculs. NUÑEZ et MAUROLYCO agissent de même et VIÈTE le premier devait faire faire en cette matière un nouveau pas à la science. N'importe, au milieu du 16<sup>e</sup> siècle l'emploi de la notation littérale de JORDAN est trop rare, pour qu'il n'y ait pas lieu de signaler à l'attention les auteurs qui en ont reconnu le mérite. Simple vérification ne fait souvent pas preuve. NUÑEZ le sait. Aussi la grande rigueur d'esprit dont il donna tant de preuves, entre autres dans sa polémique contre ORONCE FINÉ, ne pouvait manquer

1) Publiée pour la première fois en 1496 par LEFÈVRE D'ÉTAPLES. — *In hoc opere contenta: Arithmetica decem libris demonstrata. Musica libris demonstrata quatuor. Epitome i libris arithmeticos dicit SEVERINJ BOETIJ. Rithmimachie ludus q̄ & pugna numeror; appellat.* — A la fin: Has duas Quadriū partes . . . curarunt . . . Ioannes Higmanus & Volfangus Hopilius suis grauissimis laboribus & impensis. Parrhisii anno salutis Domini . . . 1496 . . . Réédité, sous le même titre, à Paris, en 1514, chez HENRI ESTIENNE. NUÑEZ cite aussi le *De ponderibus* de JORDAN DE NÉMORE, mais il nous apprend lui-même (f° 334 v°) qu'il le fait d'après une copie transcrite sur un manuscrit de l'abbaye de Saint-Victor, à Paris.

2) Sur les premier emploi des lettres, voir ENESTRÖM, *Biblioth. Mathem.* 7, 1906/7, p. 85—86.

3) D. FRANCISCI MAUROLYCI, *Arithmeticonum libri duo nunc primum in lucem editi* . . . Venetiis, Apud Franciscum Franciscium Senensem. M. D. LXXXV. CHASLES dit, on le sait, dans *l'Aperçu historique* (p. 345) que MAUROLYCO „introduisit le premier l'usage des lettres à la place des nombres dans les calculs de l'arithmétique“. Je crois devoir rappeler cette erreur de l'illustre historien, pour montrer combien petit fut le nombre des imitateurs de JORDAN DE NÉMORE.

4) An f° 30 r°, NUÑEZ après avoir donné une démonstration sur des chiffres y ajoute cette réflexion bien rare chez un algébriste du 16<sup>e</sup> siècle: „Y aun que esta demonstracion paresca particular, la razon della es vniuersal, y generalmente se puede accommodar a toda multiplicacion . . .“. Le traité *De erratis ORONTII FINAEI* par NUÑEZ a été réédité dans ses *Opera* de Bâle, 1592.

de l'avertir de la supériorité des démonstrations de JORDAN DE NÉMORE sur celles qui étaient alors habituellement en usage.

Mais s'il ne mérite que des éloges quand il suit les traces de JORDAN DE NÉMORE le souci de la rigueur n'inspire pas toujours NUÑEZ avec le même bonheur. C'est ainsi qu'on ne saurait guère l'approuver dans les vertes critiques qu'il adresse à PACIUOLO pour avoir admis les racines négatives des équations. Il s'agit, dans le passage suivant, de

$$x + 79 = 0, \text{ d'où } x = -79.$$

„La verdad es, dit NUÑEZ, que el caso es imposible; porque imposible es que numero y cosas sean yguales a cifra, y que 1. co. sea ygual a  $\bar{m} \cdot 79$ . y si entendio que  $\bar{m} \cdot 79$ . es aun menos que nihil, a que llaman debito, esto es mera vanidad y pura contradition.“<sup>1)</sup>

Mais il y a bien plus étonnant encore. NUÑEZ n'admet pas même que l'inconnue puisse avoir pour valeur zéro. Que s'il opère parfois comme si cette hypothèse était licite, il s'en excuse en invoquant l'usage et en protestant contre lui. Il s'agit cette fois de l'équation

$$40 = 40 + \frac{3}{5}x, \text{ d'où } 0 = \frac{3}{5}x, \text{ et } x = 0.$$

„Esto que, dit-il, en este caso auemos obrado ygualande 40. con  $40 \cdot \bar{m} \cdot \frac{3}{5} \cdot co$ . y concluyendo que cifra de numero es ygual a  $\frac{3}{5} \cdot co$ . es lo que communmente los Arithmeticos practicos dizen, pero es fuera de my opinion, y lo contrario tengo escripto.“<sup>2)</sup>

Pour achever de caractériser le *Libro de Algebra* je dirai que NUÑEZ y suppose connues toutes les opérations de l'arithmétique élémentaire. Quant au calcul algébrique, voici un exemple de la division avec sa preuve par la multiplication. Il s'agit de

$$(12x^3 + 18x^2 + 27x + 17) : (4x + 3)$$

ce qui donne pour quotient

$$3x^2 + 2\frac{1}{4}x + 5\frac{1}{16} + \frac{1}{4x+3} \frac{13}{16}.$$

On remarquera que le diviseur s'écrit à gauche du dividende et le quotient au dessous de toute l'opération. La disposition entière des calculs s'écarte beaucoup de celle qui était alors généralement en usage.<sup>3)</sup>

1) F° 224 r°. — Voir aussi f° 126 v° etc.

2) F° 165 v°. — Voir aussi f° 21 r°, f° 126 v°. etc.

3) F° 32 r°. L'attention a déjà été appelée, par M. TROFFKE, sur cette disposition des calculs de la division algébrique chez NUÑEZ (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Berlin 1902, p. 325).

$$\begin{array}{r}
 \text{„Partidor. } 4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3 \quad | \quad 12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 12 \cdot cu \cdot p \cdot 9 \cdot ce. \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 6 \cdot co \cdot \frac{3}{4}. \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 17. \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 15 \cdot \frac{3}{16}. \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 1 \frac{13}{16}.
 \end{array}$$

$$3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5 \cdot \frac{1}{16} \cdot \tilde{p} \cdot 1 \frac{13}{16}.$$

$$\text{par } 4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3.$$

„La prueua sera que multiplicando  $3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5 \cdot \frac{1}{16} \cdot \tilde{p} \cdot 1 \frac{13}{16}$  partidor  $4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3$  por el partidor haremos la summa principal.

$$3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5 \cdot \frac{1}{16}.$$

$$4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3.$$

$$12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 20 \cdot co \cdot \frac{1}{4}.$$

$$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 6 \cdot co \cdot \frac{3}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 15 \cdot \frac{3}{16}.$$

$$1 \frac{13}{16}.$$

$$12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$$

### III.

On a dit que NUÑEZ n'avait guère traité la résolution de l'équation du 3<sup>e</sup> degré.<sup>1)</sup> C'est une indication qui doit être modifiée. Il donne la règle de solution avec plusieurs exemples. Bien plus il énonce même cette règle dans le texte italien original de TARTAGLIA. La voici telle qu'on peut la lire dans le *Libro de algebra*.<sup>2)</sup>

1) Voir CH. HUTTON, *Tracts on mathematical and philosophical subjects* II, London 1812, p. 251: „... without treating on cubics, further than giving some account of the dispute between TARTELEA and CARDAN concerning their invention; and that in such manner as shows he did not very well understand them“.

2) F<sup>o</sup> 334 r<sup>o</sup>.

Quando chel cubo con le cose apresso  
Se agualia a qualche numero discreto  
Trouan dui altri differenti in esso,  
Dapoi terrai questo per consueto  
Ch'el lor producto sempre si eguale  
Al terzo cubo delle cose neto,  
El residuo poi suo generale  
Delli lor lati cubi ben sottrati  
Varra la tua cosa principale.<sup>1)</sup>

En style moderne ces vers connus signifient, je crois utile de le rappeler, soit à résoudre

$$x^3 + ax = b$$

déterminez deux inconnues auxiliaires  $y$  et  $z$ , au moyen des équations

$$y - z = b, \quad yz = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

et vous aurez l'inconnue principale par

$$x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}.$$

NUÑEZ, il est vrai, s'arrête ici, tandis que dans ses célèbres vers à CARDAN, TARTAGLIA résout encore

$$x^3 = ax + b \quad \text{et} \quad x^3 + b = ax.$$

Mais la résolution du premier cas suffit au but de NUÑEZ, car d'après lui, si la règle de TARTAGLIA est correcte, elle n'est pas pratique à cause de sa complication de radicaux et il faut trouver autre chose.

Voici, en résumé, son très intéressant raisonnement.

Considérons, dil-il, l'équation<sup>3)</sup>

$$x^3 + 3x = 36.$$

Il est bien aisé de s'assurer que sa racine est 3. C'est effectivement la seule racine réelle, les deux autres étant  $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{-39})$ . Or en appliquant la règle de TARTAGLIA on trouve

$$x = \sqrt{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}.$$

Considérons ensuite l'équation<sup>3)</sup>

$$x^3 + 9x = 54$$

1) Voir le commentaire de ces vers chez COSSALI: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra* II, Parma 1799, p. 154 et suiv. ou chez CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2<sup>e</sup>, p. 488—489. Je conserve l'orthographe de NUÑEZ.

2) F<sup>o</sup> 340 v<sup>o</sup>.

3) F<sup>o</sup> 340 v<sup>o</sup>—341 r<sup>o</sup>.

Il est de nouveau aisé de s'assurer que sa racine est 3. C'est encore une fois la seule racine réelle, puisque les deux autres sont

$$\frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{-7}).$$

Mais en appliquant la règle de TARTAGLIA on trouve

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27}.$$

Et maintenant il faut céder la plume à NUÑEZ.<sup>1)</sup>

„Ny aura“, dit-il, „Arithmetico de tan sutil ingenio, que proponendiose estas dos quantidades

$$R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 325 \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 325 \cdot \tilde{m} \cdot 18.$$

$$\left( = \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18} \right)$$

y<sup>2)</sup>

$$R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 756 \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 756 \cdot \tilde{m} \cdot 27.$$

$$\left( = \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27} \right)$$

pueda conocer que son yguales, y valo pero cada vna dellas 3. Y el impedimento es, venir el valor de la cosa explicado por quantidades irracionales, y los binomios las mas vezes no seren cubos.“

Voilà qui est clair et qui explique bien la manière de faire de NUÑEZ. Il expose un des cas de la règle de TARTAGLIA, ce qui est très suffisant pour la faire connaître. S'il ne s'étend pas sur les autres, c'est parce qu'à son avis, cette règle est, en fait, peu pratique. Même quand la racine est en réalité rationnelle, comme dans les exemples donnés ci dessus, on la trouve sous une forme si compliquée de radicaux qu'on ne saurait pas y reconnaître la véritable valeur rationnelle de cette racine. Pour résoudre l'équation du 3<sup>e</sup> degré il faut donc s'y prendre autrement que TARTAGLIA.

Le procédé de NUÑEZ est ingénieux et devait devenir fécond entre les mains de ses successeurs. Tel qu'il l'expose il est évidemment moins pratique encore que celui qu'il critique, mais il l'est pour d'autres motifs. Pour qu'on puisse en juger le voici, en deux mots<sup>3)</sup>:

Soit 
$$x^3 = ax^2 + bx + c$$

l'équation du 3<sup>e</sup> degré, dans laquelle l'auteur distingue plusieurs cas d'après les signes de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . En retranchant préalablement aux deux membres une quantité convenablement choisie, on pourra toujours leur

1) NUÑEZ commet ici une faute de plume et écrit deux fois 576 pour 756.

2) F<sup>o</sup> 341 r<sup>o</sup>.

3) Il fait l'objet du chapitre 1 de la 3<sup>e</sup> partie, f<sup>o</sup> 123 v<sup>o</sup>—133 r<sup>o</sup>.

trouver un diviseur commun du premier degré en  $x$ , et après l'avoir supprimé, la proposée sera ramenée au second degré.

Pour nous, l'exactitude de cette règle est intuitive; car soit  $p$  une racine de la proposée, en en retranchant membre à membre

$$p^3 = ap^2 + bp + c$$

il vient

$$x^3 - p^3 = a(x^2 - p^2) + b(x - p)$$

qui se décompose en

$$x - p = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + px + p^2 = a(x + p) + b.$$

Mais la lecture de NUÑEZ laisse cependant l'impression qu'il n'a entrevu que d'une manière assez confuse ce raisonnement si simple. On se demande surtout s'il a aperçu que  $x = p$  est toujours l'une des racines de l'équation, même quand  $p$  est négatif.

Quoiqu'il en soit, et la remarque est importante, NUÑEZ dit en termes exprès<sup>1)</sup> qu'on n'a pas encore découvert la règle générale à suivre, pour trouver à coup sur le nombre à retrancher aux deux membres et rendre ainsi possible l'abaissement du degré de l'équation.

Il donne cependant à ces sujets quelques conseils.

Le premier est de savoir par coeur les résultats des produits<sup>2)</sup>

$$(x + 1)(x + 1), \quad (x + 1)(x + 2), \quad (x + 1)(x + 3), \dots$$

$$(2x + 1)(x + 1), \quad (2x + 1)(x + 2), \dots$$

et ainsi de suite jusqu'à 10.

Il indique ensuite certaines formes particulières de l'équation pour lesquelles le diviseur se trouve d'après une règle générale.

Si la proposée est de la forme<sup>3)</sup>

$$x^3 = (a + 1)x + a,$$

ajoutez l'unité aux deux membres, il vient

$$x^3 + 1 = (a + 1)(x + 1)$$

et l'on peut supprimer  $x + 1$ .

Plus généralement, et cette généralisation est exprimée très explicitement, étant donnée<sup>4)</sup>

$$x^3 = ax + b$$

s'il existe entre  $a$  et  $b$  une relation de la forme  $p^3 = ap - b$ , il vient

$$x^3 + p^3 = a(x + p)$$

et l'on peut diviser par  $x + p$ .

1) F<sup>o</sup> 125 v<sup>o</sup>.

2) F<sup>o</sup> 125 v<sup>o</sup>.

3) F<sup>o</sup> 126 r<sup>o</sup> et v<sup>o</sup>.

4) F<sup>o</sup> 126 r<sup>o</sup>—127 r<sup>o</sup>.

De même, de<sup>1)</sup>

$$x^3 + a = (a + 1)x$$

on tire

$$x^3 - 1 = (a + 1)(x - 1)$$

et  $x - 1$  est facteur commun. Après l'avoir supprimé l'équation est abaissée au 2<sup>a</sup> degré.

Généralisation analogue à la précédente. Si dans<sup>2)</sup>

$$x^3 + b = ax$$

il existe entre  $a$  et  $b$ , la relation  $p^3 = ap - b$ , il vient

$$x^3 - p^3 = a(x - p)$$

et l'on pourra affirmer, sans raisonnement ultérieur, „sin otro discurso“, que  $x = p$  est toujours racine. Mais cette racine n'est pas la seule. Supprimons aux deux membres le facteur  $x - p$ , l'équation du 2<sup>a</sup> degré obtenue fournira les racines restantes.

Les quatre équations générales<sup>3)</sup>

$$(1 + a + b)x = x^3 + ax^2 + b$$

$$(1 + a + b)x^2 = x^3 + ax + b$$

$$ax^2 + bx = x^3 + (a + b - 1)x$$

$$ax^2 + b = x^3 + (a + b - 1)x$$

admettent toutes la racine  $x = 1$ . Elles peuvent s'écrire respectivement:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(b + 1 - ax)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)[(a + b + 1)x + b + 1]$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(ax + a + b)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(ax - b + 1)$$

Pour obtenir les autres racines, on supprime aux deux membres le diviseur commun  $x - 1$  et on égale les quotients obtenus

Enfin les trois équations générales<sup>4)</sup>

$$ax^2 + a = x^3 + x$$

$$ax + a = x^3 + x^2$$

$$ax^2 + ax = x^3 + 1$$

admettent toutes un diviseur commun aux deux membres. Ce diviseur est  $x^2 + 1$  pour la première équation et  $x + 1$  pour les deux autres.

Toute cette théorie de l'abaissement du degré des équations est très intéressante. Elle frappa vivement les contemporains de NUÑEZ qui ne

1) F<sup>o</sup> 127 r<sup>o</sup> et v<sup>o</sup>. 2) F<sup>o</sup> 127 v<sup>o</sup>—128 r<sup>o</sup>. 3) F<sup>o</sup> 128 r<sup>o</sup>—132 r<sup>o</sup>.

4) F<sup>o</sup> 132 r<sup>o</sup>—133 r<sup>o</sup>.

lui ménagèrent pas leurs éloges. Ces éloges ont même fait croire à quelques historiens que NUÑEZ était l'inventeur du procédé de la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, par la voie des divisions successives des polynômes l'un par l'autre. M. MAURICE CANTOR<sup>1)</sup>, exemple, sans se prononcer cependant pour cette opinion d'une manière tout à fait catégorique, invoque en sa faveur le passage que voici livre II de *L'Arithmétique* de SIMON STEVIN<sup>2)</sup>:

„Probleme LIII.

Estant donnez deux multinomies algébriques, trouver leur plus grande commune mesure.

Nota. PETRUS NONIUS au commencement de la troisième partie son *Algebre*, estimoit qu'alors ce problème n'estoit par générale reventé<sup>3)</sup>; parquoi il en descriptoit quelque manière à tastons. N' descriptons sa legitime construction, qui sera semblable à l'opération l'invention de la plus grande commune mesure des nombres Arithmetiques entiers du 5 problème: à sçavoir on diuiera premièrement le moindre par le moindre, et puis le diuiseur autrefois par la reste, iusques à qu'il ne reste rien.“

Ce passage est équivoque et on conçoit que ceux qui n'avaient le texte de NUÑEZ sous les yeux aient pu s'y tromper. A la décharge géomètre flamand il ne faut pas oublier que, contrairement à son habitude, il a écrit son *Arithmétique* en français, langue qu'il ne maniait, avec la facilité, ni avec la précision de sa langue maternelle.

Quoiqu'il en soit, nous venons de résumer intégralement la recherche „à tastons“ de la commune mesure des „multinomies“ chez NUÑEZ. bien! non seulement STEVIN a raison quand il dit que l'algébriste portugais n'a pas inventé une „reigle generale“ pour la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, mais avec sa modestie habituelle il lui doit même trop de part dans la découverte, car pas un seul des exemples NUÑEZ n'est traité par voie de division des deux „multinomies“ données l'une par l'autre.

Qu'en conclure?

Que la lecture de NUÑEZ a probablement suggéré à STEVIN l'idée de rechercher une méthode générale pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynômes en imitant „l'invention de la plus grande commune mesure des nombres arithmétiques entiers“. Voilà, pour

1) *Vorlesungen* 2<sup>a</sup>, p. 389.

2) *L'Arithmétique de SIMON STEVIN de Bruges*... A Leyde, De l'Imprimerie Christophe Plantin. CIO.IO. LXXXV, p. 240. — Reproduit dans les *Oeuvres*, Leyde 1634, tom. I, p. 56.

3) *Libro de algebra*, f<sup>o</sup> 124 v<sup>o</sup>.

part, le sens que j'attache à sa Note. Quant à la découverte elle-même de la méthode, le mérite lui en appartient.

Il est bien clair, d'après ce qui précède, qu'on jugerait mal le *Libro de algebra* en disant simplement, sans correctif, que NUÑEZ n'y traite pas la résolution de l'équation du 3<sup>e</sup> degré. La vérité est qu'il ne la traite pas à la manière de CARDAN. A tort ou à raison il regarde la formule TARTAGLIA-CARDAN comme manquée, même en dehors du cas irréductible, parce qu'elle est trop compliquée de radicaux. En cela il n'est pas le seul, et dans son essai historique sur la résolution des équations, ADRIEN ROMAIN n'est pas moins catégorique que lui. A preuve ce passage<sup>1)</sup>:

„Inter omnes aequationes quae sequuntur aequationes gradus secundi, primo occurrit aequatio gradus tertii affecti gradu primo (c. à d. de la forme  $x^3 \pm ax \pm b = 0$ ). Eam vero hactenus perfecte et generaliter exhibuit nemo. HIERONYMUS CARDANUS (*libro artis magna*, cap. 25) ut aequationes gradus tertii affecti gradu primo exhibeat, nullam potest invenire regulam generalem, sed exhibet regulas particulares quindecim, quae sane nec ipsae ne ex minimā parte satisfaciunt.“

Les formules de CARDAN „ne ex minimā parte satisfaciunt“. Comme NUÑEZ, ROMAIN est donc d'avis qu'il faut trouver mieux et il ajoute qu'il y est arrivé.<sup>2)</sup>

En quoi consistait sa méthode?

La partie de l'*In MAHUMEDIS Algebram* où il l'expliquait est malheureusement perdue. On peut cependant la deviner par les calculs qu'il nous a laissés dans ses autres ouvrages. Le *Mathematicae analyseos triumphus*<sup>3)</sup> notamment permet d'affirmer qu'elle avait de l'analogie avec la méthode exposée par SIMON STEVIN dans son *Appendice algebraïque*.<sup>4)</sup>

1) *In MAHUMEDIS Algebram*, p. 12. — Voir sur ce rarissime ouvrage mon mémoire: *Le fragment du commentaire d'ADRIEN ROMAIN sur l'algèbre de MAHUMED BEN MUSA EL CHOWAREZMI*, publié dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles 30: 2, 1906, p. 267—287.

2) O. c. p. 15.

3) *Mathematicae analyseos Triumphus in quo lateris enneagoni circulo inscripti ad Radium Circuli exhibetur ratio à Geometris summè desiderata. Ad Illum & Rmum Principem ac Dominum, D. IVLIVM, Episcopum Herbipolensem, & Franciae Orientalis Ducem, &c. Authore A. ROMANO, Equite Aurato, Comiti Palatino, Medico Caesareo, atq; ad D. Ioannis Evangelistae Herbipoli Canonico.* Lovanii, Sumpibus authoris. Anno 1609. — J'ai analysé cet ouvrage très rare, dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles 29: 1, 1905, p. 77—79, d'après un exemplaire appartenant à l'Université de Munich, où il est coté, 199 *Math.*

4) *Appendice Algebraïque, de SIMON STEVIN de Bruges, contenant regle generale de toutes équations.* — L'*Appendice* sort des presses de François van Raphelengen de Leyde. L'exemplaire que j'en connais appartient à l'Université de Louvain, où il est coté *Scienc.* 587. ALBERT GIRARD l'a introduit presque intégralement dans le texte même de son édition de *L'Arithmétique de SIMON STEVIN de Bruges*, Leyde 1625,

Elle reposait évidemment sur ce principe fondamental de la résolution des équations numériques, que deux nombres comprennent entre eux une racine de l'équation, si, substitués dans son premier membre, il lui font prendre des signes contraires.

NUÑEZ n'a pas été aussi loin, et encore une fois, réduite à de purs tâtonnements, sans règle pour les diriger, sa méthode a des défauts d'un genre différent il est vrai de ceux des formules de CARDAN, mais qui l'empêche d'avoir, en pratique, sur ces formules, une supériorité marquée.

Quant à ADRIEN ROMAIN, il connaissait certainement le *Libro de algebra*. J'en ai la preuve incontestable, car je me sers de l'exemplaire même qui a appartenu à l'illustre professeur de Louvain et de Wurzburg. Serait-il téméraire d'affirmer qu'il a été frappé par les efforts tentés par NUÑEZ pour trouver directement une première racine de l'équation et que la lecture de l'algébriste portugais lui a suggéré l'idée de rechercher une règle générale pour y arriver? Quoiqu'il en soit de cette intéressante question d'influence, le mérite d'avoir découvert la règle n'en reviendrait pas moins au géomètre flamand.

#### IV.

Quant aux équations de degré supérieur à 3, NUÑEZ, à l'instar des mathématiciens arabes et des algébristes de la renaissance, ne s'occupe que de celles de la forme<sup>1)</sup>

$$x^{2m} + ax^m + b = 0$$

dont la résolution peut être ramenée à celle d'une équation du 2<sup>d</sup> degré. Outre l'équation générale<sup>2)</sup>, il traite, entre autres, de cette manière<sup>3)</sup>

$$3x^3 + x^6 = 88, \quad 16x + x^7 = 10x^4.$$

Pour terminer cette note, j'ajoute un mot sur la résolution des équations à plusieurs inconnues.

Cette théorie fait chez NUÑEZ l'objet du chapitre 6 de la 3<sup>e</sup> partie intitulé: „De la regla de la cantidad simple o absoluta.“<sup>4)</sup> La *cantidad*, on le sait, est la deuxième inconnue. NUÑEZ ne la représente ni par une deuxième lettre, ni même par une deuxième abréviation, il écrit toujours le mot *cantidad* au long. J'ai déjà observé ailleurs<sup>5)</sup> combien d'algébristes du 16<sup>e</sup> siècle, même parmi les plus éminents, n'avaient pas apprécié

p. 351—355 (dans les *Oeuvres*, Leyde 1634, p. 88—89) et en a fait sous le nom de „Reigle“ un corollaire du Problème LXXVII. CANTOR expose la méthode de STEVIN dans ses *Vorlesungen* 2<sup>e</sup>, p. 628—629.

1) F<sup>o</sup> 150 r<sup>o</sup>—151 v<sup>o</sup>.

2) F<sup>o</sup> 150 r<sup>o</sup>.

3) F<sup>o</sup> 150 v<sup>o</sup>.

4) F<sup>o</sup> 224 v<sup>o</sup>—227 v<sup>o</sup>.

5) *L'Algèbre de JACQUES PELETIER*, publié dans la Revue des questions scientifiques de la société scientifique de Bruxelles 7, 1, 1907, p. 117—173.

l'utilité des lettres multiples pour représenter les diverses inconnues. Au moment où j'écrivais, je n'avais pas lu NUÑEZ, car j'eus pu ajouter son nom à ma liste. S'il expose la résolution des équations à plusieurs inconnues, et il l'expose bien, c'est surtout dans le but avoué de démontrer que la méthode est compliquée et qu'il vaut mieux s'en passer.<sup>1)</sup> C'est là aussi, on le sait, l'avis de GEMMA FRISIUS.<sup>2)</sup> Mais qui plus est, FRISIUS fait cette réflexion en marge de son exemplaire de l'*Arithmetica integra* de STIFEL! De STIFEL, tant plus clair cependant que CARDAN, seul connu par NUÑEZ!

Tout ce chapitre 6 du *Libro de algebra* est des plus intéressants. L'auteur commence par y résoudre un problème de CARDAN.<sup>3)</sup>

„Tres erant viri pecuniam habentes“, avait dit CARDAN. „Primus cum dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cum reliquorum tertia parte 28. Tertius cum reliquorum parte quarta 31. Quaeritur quantum quisque habuit?“

L'intérêt du problème provient de ce qu'on le retrouve repris avec les mêmes données numériques par plusieurs des principaux algébristes du seizième siècle et notamment par PELETIER.<sup>4)</sup> Il est amusant et surtout instructif, de voir ces maîtres se buter à des difficultés qui de nos jours n'embarrasseraient plus les tout commençans. PELETIER après avoir reproduit, comme il le dit, „de point en point“ la solution de CARDAN en critique la longueur et la complication; puis il en essaie une solution meilleure dans le style de STIFEL. Il y a progrès, mais c'est encore loin de la perfection.

A l'exemple de PELETIER, NUÑEZ suit aussi pas à pas CARDAN, tout en imprimant à l'ensemble de la question une marque fort personnelle. Et tout d'abord l'énoncé prend chez lui ce tour abstrait, déjà si moderne, qui donne tant de charme à tout son ouvrage. Les écus, les tonneaux

1) „HIERONYMO CARDANO hallo muchas Reglas de cantidad, por las quales resuelue muchas questionos que trae, podiendo se muy bien resolver por las Reglas de la cosa, y con mas facilidad. Y para que esto que dizimos conste ser assi, trataremos vna question suya que por la cantidad resuelue, la qual es esta . . .“, f° 226 v°.

2) *Le Commentaire de GEMMA FRISIUS sur l'Arithmetica integra de STIFEL* par H. BOSMANS, publié dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles 30: 1, 1906, p. 168.

3) *Artis magnae*, cap. 9. Dans les *HIERONYMI CARDANI Opera*, 4, Lugduni M. DC. LXIII, p. 241—242.

4) *L'algebre de IAQVES PELETIER de Mans departie en deus Liures . . .* A Lion. Par Ian de Tovrnes. M. D. LIIII . . ., p. 107—110. — *IACOBI PELETARII Cenomani, De occulta parte numerorum, quam algebram vocant, libri duo*. Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat . . . 1560 . . ., f° 31 r° et v°.

de vin, les aunes de drap sont bien loin; il s'agit tout bonnement de la recherche de trois nombres.<sup>1)</sup> „Tenemos tres numeros“, dit-il, „que e primero con la mitad de los otros, haze 32; y el segundo con el tercio de los otros dos, haze 28; y el tercero con el quarto de los otros dos haze 31; y queremos saber quanto es cada vno dellos?“

La solution de NUÑEZ, nous venons de le dire, est celle de CARDAN. Il y passe par des calculs analogues à ceux de l'algébriste italien, mais notablement plus courts et plus simples. Cependant ils ne le satisfont pas, aussi les termine-t-il par cette réflexion.<sup>2)</sup> „Pero nos auemos tratado este mismo exemplo, que es el caso 51, y lo practicamos muy facilmente, y breuemente por la cosa, sin vsar de la cantidad absoluta.“ Le problème 51 du chapitre 5 de la 3<sup>e</sup> partie<sup>3)</sup> est effectivement le même que celui qui nous occupe et il y est résolu au moyen d'une seule inconnue. Cette solution n'appelle pas de remarque; je n'y insiste pas.

Je suis loin d'avoir signalé tout ce que le *Libro de algebra* renferme de curieux, mais ce que j'en ai dit suffit à prouver sa haute valeur. C'est un ouvrage digne de l'estime dont il jouit au 16<sup>e</sup> siècle.

1) F° 224 v°.

2) F° 225 v°.

3) F° 169 v°—170 r°.